Πανεπιστημιο Ιωαννινων, Τμημα Μαθηματικων,
Αριθμητικη Επιλυση Συνηθων Διαφορικων Εξισωσεων,
Διδασκων: Μ. Ξενος 31/01/2017

Θέματα

1. (α) Θεωρήστε το πρόβλημα δοκιμής. (*i*) Με τη βοήθεια του προβλήματος δοκιμής να εκτιμήσετε το διάστημα απόλυτης ευστάθειας για τη μέθοδο του Euler και για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. (*ii*) Να σχεδιάσετε την περιοχή απόλυτης ευστάθειας για τις δύο παραπάνω μεθόδους.
(β) Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:
$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$
με $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ ένας μη θετικά ορισμένος πίνακας. Αν y^n η προσέγγιση της $y(t^n)$ με την μέθοδο του τραπεζίου και $t^n = nh$, να δείξετε ότι $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$, $n \in \mathbb{N}^*$ (όπου $\|.\|$ η Ευκλείδια νόρμα).

2. (α) Να δείξετε ότι η μέθοδος Runge-Kutta με μητρώο:
$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$
έχει τάξη ακρίβειας δύο.
(β) Να δείξετε ότι μια μέθοδος Runge-Kutta έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1$ αν και μόνο αν $\sum\limits_{i=1}^{q} b_i = 1$.
Αν ισχύει ότι $\sum\limits_{i=1}^{q} b_i = 1$, πώς καλείται η μέθοδος Runge-Kutta;

3. (α) (*i*) Πότε μια μέθοδος Runge-Kutta ονομάζεται αλγεβρικά ευσταθής; (*ii*) Η μέθοδος Runge-Kutta με μητρώο:
$$\begin{array}{cc|c} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \end{array}$$
είναι αλγεβρικά ευσταθής; Είναι η μέθοδος *B*-ευσταθής;
(β) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:
$$\begin{cases} y'(t) = 1, \quad t \in [0, 1], \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$
Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$ και y^N η προσέγγιση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών στο σημείο 1, την οποία δίνει μια μέθοδος Runge-Kutta όταν εφαρμοστεί με βήμα h. Αν υποθέσουμε ότι $y^N \to 1$ όταν $N \to \infty$, να δείξετε ότι η μέθοδος Runge-Kutta είναι συνεπής.

4. (α) Έστω η πολυβηματική μέθοδος:
$$\begin{cases} y^0, y^1, ..., y^{k-1}, \\ \alpha_k y^{n+k} + ... + \alpha_0 y^n = h(\beta_k f^{n+k} + ... + \beta_0 f^n), \quad n = 0, ..., N-k. \end{cases} \tag{3}$$
(*i*) Πότε η πολυβηματική μέθοδος πληροί τη συνθήκη των ριζών; (*ii*) Πότε η πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής;
(β) Η παρακάτω τριβηματική μέθοδος είναι άμεση ή πεπλεγμένη;
$$6y^{n+3} - 11y^{n+2} + 6y^{n+1} - y^n = h\left(\frac{1}{2}f^{n+3} + f^{n+2} - 3f^{n+1} + \frac{7}{2}f^n\right). \tag{4}$$
Είναι η μέθοδος ευσταθής και γιατί; Να δείξετε ότι η μέθοδος είναι συνεπής.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. **Καλη Επιτυχια!**